Domácí úkol ze cvičení 9 – základní pojmy u funkcí více proměnných

1. Rozhodněte, zda následující funkce jsou spojité v R^2:

   a) $f(x,y) = (x+y)^2 . \cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$;

   b) $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

2. („Mechanické" derivování.)
   Vypočítejte parciální derivace 1. a 2.řádu všude, kde existují, funkcí:

   a) $f(x,y) = \exp(x^2 - y - \frac{x}{y})$; b) $f(x,y,z) = \sqrt{z - x^2 - y^2}$; c) $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$;

   Pokuste se také zjistit (podle přednášky 18.4., i když jsme toto zatím necvičili), kde jsou dané funkce diferencovatelné a napsat v těchto bodech jejich diferenciál.

3. Je dána funkce f : $f(x,y) = xy$ pro $|x| \geq |y|$, $f(x,y) = 0$ pro $|x| < |y|$.
   a) Vyšetřete spojitost funkce f v R^2;
   b) Vypočítejte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;
   c) Vyšetřete, zda je funkce f v bodě $(0,0)$ diferencovatelná (opět zkuste podle přednášky 18.4.);
   d) Ukažte, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.